

---

# Progetto CRESCO

Centro computazionale di RicErca sui Sistemi Complessi

SP III.3 Modelli e Strumenti di supporto alla Ottimizzazione e Riconfigurazione delle Reti

---

## Deliverable 2

### Report sull'analisi di problemi di convergenza e sviluppo di schemi numerici

#### Unità operativa DIIMA

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata  
Università di Salerno



18/03/2008

Responsabile Unità Operativa  
Prof. Ciro D'Apice

## SOMMARIO

|                                                           |          |
|-----------------------------------------------------------|----------|
| <b>Introduzione.....</b>                                  | <b>3</b> |
| 1 Metodi numerici per equazioni iperboliche lineari ..... | 5        |
| 1.1 Un problema di trasporto scalare .....                | 5        |
| 1.2 Il metodo delle differenze finite.....                | 7        |
| 1.2.1 Discretizzazione dell'equazione scalare .....       | 8        |
| 1.3 Analisi dei metodi alle differenze finite.....        | 10       |
| 1.3.1 Consistenza e convergenza .....                     | 10       |
| 1.3.2 Stabilità .....                                     | 11       |
| 2 Cenni a problemi iperboliche non lineari .....          | 14       |
| 2.1 Equazioni scalari .....                               | 14       |
| 2.2 Approssimazione alle differenze finite .....          | 20       |
| 2.3 Approssimazione con elementi finiti discontinui.....  | 22       |
| 3 Metodo numerico per modello TLC .....                   | 24       |
| 3.1 Metodo di Godunov .....                               | 24       |
| 3.2 Metodo cinetico.....                                  | 28       |

## Introduzione

Le attività previste dal Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata dell'Università di Salerno nell'ambito del progetto Cresco, inquadrato nel **SP III.3 Modelli e Strumenti di supporto alla Ottimizzazione e Riconfigurazione delle Reti**, hanno riguardato l'analisi e lo sviluppo di schemi numerici ad hoc per la discretizzazione delle equazioni differenziali alle derivate parziali (leggi di conservazione) che sono alla base del modello fluidodinamico sviluppato per la descrizione dei flussi di pacchetti su una rete di telecomunicazioni.

La rete, infatti, viene descritta da un numero finito di linee di trasmissione modellate da intervalli  $[a_i, b_i]$  (con uno dei due estremi possibilmente infinito) che si incontrano in qualche nodo (routers) che riceve e invia informazioni in forma di pacchetti.

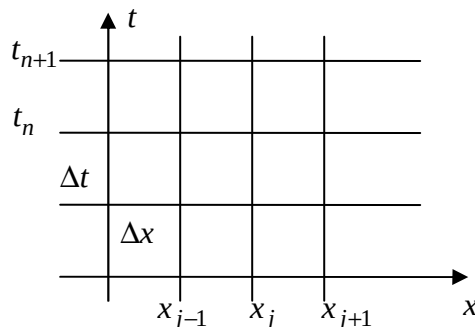
La dinamica su ogni singola linea della rete viene descritta da un sistema costituito da una legge di conservazione, in cui la quantità conservata è la densità di pacchetto  $\rho$  e da un'equazione semilineare che descrive l'evoluzione di  $\pi$ :

$$\begin{cases} \rho_t + f(\rho)_x = 0, \\ \pi_t + v(\rho)\pi_x = 0, \end{cases}$$

dove  $\rho$  è la densità dei pacchetti (numero di pacchetti per unità di spazio) ed  $f = \rho v(\rho)$  è il flusso (numero di pacchetti per unità di tempo), con  $v(\rho)$  velocità di trasmissione dei pacchetti e  $\pi$  è il vettore che descrive la tipologia di traffico cioè la percentuale di pacchetti che vanno da una data sorgente  $s$  ad una determinata destinazione  $d$ .

Poiché l'obiettivo è quello di modellare reti complesse è stata risolta la dinamica ai nodi in cui molte linee si intersecano. Il passo principale per la risoluzione del Problema di Cauchy ai nodi consiste nella risoluzione del problema di Riemann, problema di Cauchy con dati iniziali di tipo Heavy-side. Per simulare il modello è stato necessario trattare numericamente i problemi di Riemann. Si è fatto ricorso, pertanto, ad opportuni metodi numerici.

E' stata definita, quindi, una griglia numerica in  $\mathbf{R}^N \times (0, T)$



in cui  $\Delta x$  è l'ampiezza spaziale della griglia,  $\Delta t$  è l'ampiezza temporale della griglia,  $(x_m, t_n) = (m\Delta x, n\Delta t)$  per  $n \in \mathbf{N}$  e  $m \in \mathbf{Z}$  sono i punti della griglia.

Tale discretizzazione viene utilizzata per entrambi i metodi numerici utilizzati per il modello di telecomunicazioni: il metodo di Godunov ed il metodo cinetico, che verranno illustrati in dettaglio nell'ultima parte di questo documento.

Il documento è articolato in tre parti. Nella prima parte del documento verranno illustrati i metodi numerici per equazioni iperboliche lineari. In particolare si andrà a considerare l'approssimazione numerica con il metodo delle differenze finite che, da un punto di vista storico, è stato il primo metodo ad essere usato per equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo iperbolico. Nella seconda parte verranno illustrati i metodi numerici per equazioni iperboliche non lineari. In particolare saranno introdotti alcuni esempi di problemi iperbolicici non lineari e saranno illustrate alcune proprietà caratteristiche di tali problemi, la più rilevante essendo quella di poter ammettere soluzioni discontinue anche nel caso di dati continui. Infine, nell'ultima e terza parte, verranno illustrati nel dettaglio i metodi numerici per il modello di telecomunicazioni, ovvero lo schema numerico di Godunov e lo schema numerico cinetico.

# 1 Metodi numerici per equazioni iperboliche lineari

## 1.1 Un problema di trasporto scalare

Consideriamo il seguente problema iperbolico scalare:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.1)$$

dove  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . La soluzione del problema è un'onda viaggiante con velocità  $a$  data da:

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad t \geq 0.$$

Consideriamo le curve  $x(t)$  nel piano  $(x, t)$ , soluzione delle seguenti equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a, & t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

al variare di  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Tali curve sono dette *linee caratteristiche* (o spesso semplicemente caratteristiche) e lungo esse la soluzione rimane costante in quanto:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0.$$

Si considera il problema più generale:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + a_0 u = f, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.2)$$

dove  $a, a_0, f$  sono funzioni assegnate nelle variabili  $(x, t)$ , le linee caratteristiche  $x(t)$  sono le soluzioni del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, t), & t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

In tal caso, le soluzioni di (1.2) soddisfano la seguente relazione:

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = f(x(t), t) - a_0(x(t), t) u(x(t), t).$$

È quindi possibile ricavare la soluzione  $u$  risolvendo un'equazione differenziale ordinaria su ogni curva caratteristica (tale approccio porta al cosiddetto *metodo delle caratteristiche*).

Consideriamo ora il problema (1.1) in un intervallo limitato. Ad esempio, supponiamo  $x \in [0,1]$  e  $a > 0$ . Poiché  $u$  è costante sulle caratteristiche, dalla Fig. 1.1 si deduce che il valore della soluzione nel punto  $P$  coincide con il valore di  $u_0$  nel “piede”  $P_0$  della caratteristica uscente da  $P$ . La caratteristica uscente dal punto  $Q$ , invece, interseca la retta  $x = 0$  per  $t > 0$ . Il punto  $x = 0$  è, quindi, di *inflow* ed in esso è necessario assegnare il valore di  $u$ . Si noti che se fosse  $a < 0$ , il punto di inflow sarebbe  $x = 1$ . Facendo riferimento al problema (1.1), è opportuno osservare che se  $u_0$  fosse una funzione discontinua nel punto  $x_0$ , allora tale discontinuità si propagherebbe lungo la caratteristica uscente da  $x_0$  (questo processo può essere formalizzato rigorosamente dal punto di vista matematico, introducendo il concetto di *soluzione debole* per i problemi iperbolici).

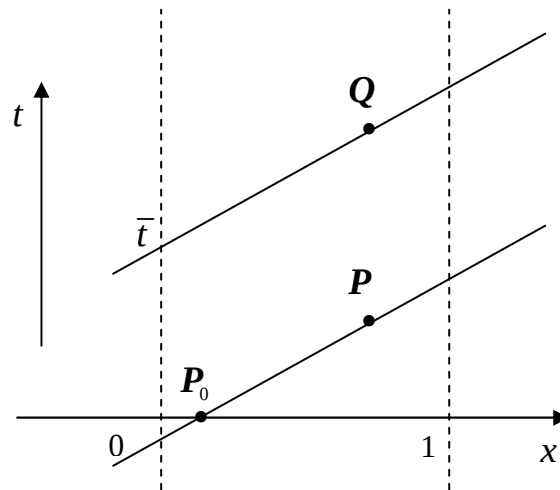


**Figura 1.1.** Esempi di linee caratteristiche uscenti dai punti  $P$  e  $Q$

Per regolarizzare le discontinuità, si potrebbe approssimare il dato iniziale  $u_0$  con una successione di funzioni regolari  $u_0^\varepsilon(x)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Questo procedimento è efficace, però, solo se il problema iperbolico è lineare. Le soluzioni di problemi iperbolici non lineari possono, infatti, sviluppare discontinuità anche per dati iniziali regolari (come si vedrà in seguito). In questo caso, la strategia (cui si ispirano anche i metodi numerici) è quella di regolarizzare l’equazione differenziale stessa piuttosto che il dato iniziale. In tale prospettiva, si può considerare la seguente equazione parabolica di diffusione e trasporto:

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + a \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \square,$$

per piccoli valori di  $\varepsilon > 0$ .

Essa è la regolarizzata parabolica dell'equazione (1.1). Se si pone  $u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x)$ , si può dimostrare che:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u^\varepsilon(x, t) = u_0(x - at), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

## 1.2 Il metodo delle differenze finite

Considereremo, per semplicità, il caso del problema (1.1), con  $f = 0$ . Per risolverlo numericamente, si possono utilizzare discretizzazioni spazio – temporali basate sul metodo delle differenze finite. In tal caso, il semipiano  $\{t > 0\}$  viene discretizzato scegliendo un passo temporale  $\Delta t$ , un passo di discretizzazione spaziale  $h$  e definendo i punti di griglia  $(x_j, t^n)$  nel seguente modo:

$$x_j = jh, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad t^n = n\Delta t, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Sia:

$$\lambda = \frac{\Delta t}{h},$$

e definiamo:

$$x_{j+\frac{1}{2}} = x_j + \frac{h}{2}.$$

Cerchiamo soluzioni discrete  $u_j^n$  che approssimano  $u(x_j, t^n)$  per ogni  $j$  e  $n$ .

I problemi ai valori iniziali iperbolici sono spesso discretizzati rispetto al tempo con metodi espliciti. Questo, naturalmente, impone delle restrizioni sui valori di  $\lambda$ , restrizioni che i metodi impliciti di solito non hanno.

Un qualsiasi metodo esplicito alle differenze finite per il problema (1.1) può essere scritto nella forma:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda (H_{j+1/2}^n - H_{j-1/2}^n), \quad (1.3)$$

dove  $H_{j+1/2} = H(u_j, u_{j+1})$ , essendo  $H(\cdot, \cdot)$  il *flusso numerico*.

Lo schema numerico (1.3) nasce dalla seguente considerazione. Supponiamo che  $a$  sia costante e scriviamo l'equazione (1.1) in forma conservativa. Si ha che:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (au)}{\partial x} = 0,$$

dove  $au$  rappresenta il *flusso* associato all'equazione (1.1). Integrando spazialmente, si ottiene che:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{\partial u}{\partial t} dx + [au]_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} = 0, \quad j \in \mathbb{Z},$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial t} U_j + \frac{(au)(x_{j+1/2}) - (au)(x_{j-1/2})}{h} = 0,$$

dove

$$U_j = h^{-1} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x) dx.$$

La (1.3) può ora interpretarsi come un'approssimazione in cui si discretizzi la derivata temporale con la differenza finita di Eulero in avanti,  $U_j$  sia sostituita da  $u_j$  e  $H_{j+1/2}$  sia un'opportuna approssimazione di  $(au)(x_{j+1/2})$ .

### 1.2.1 Discretizzazione dell'equazione scalare

Nell'ambito dei metodi espliciti, i metodi numerici si differenziano a seconda di come viene scelto il flusso numerico  $H$ . In particolare, citiamo i seguenti metodi:

#### 1. Eulero in avanti /centrato (EA/C)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2} a(u_j^{n+1} - u_{j-1}^n), \quad (1.4)$$

che è della forma (1.3) con

$$H_{j+1/2} = \frac{1}{2} a(u_{j+1} + u_j). \quad (1.5)$$

#### 2. Lax – Friedrichs (LF)

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_j^{n+1} + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda}{2} a(u_j^{n+1} - u_{j-1}^n), \quad (1.6)$$

anch'esso nella forma (1.3) con

$$H_{j+1/2} = \frac{1}{2} [a(u_{j+1} + u_j) - \lambda^{-1} (u_{j+1} - u_j)]. \quad (1.7)$$

#### 3. Lax – Wendroff (LW)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2} a(u_j^{n+1} - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2} a^2(u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (1.8)$$

che si può riscrivere nella forma (1.3) pur di prendere

$$H_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left[ a(u_{j+1} + u_j) - \lambda a^2(u_{j+1} - u_j) \right]. \quad (1.9)$$

#### 4. Upwind (o Eulero in avanti / decentrato) (U)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2} a(u_j^{n+1} - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda}{2} |a|(u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (1.10)$$

corrispondente alla forma (1.3) pur di definire nel modo seguente il flusso numerico:

$$H_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left[ a(u_{j+1} + u_j) - |a|(u_{j+1} - u_j) \right]. \quad (1.11)$$

Il metodo LF rappresenta una modifica del metodo EA/C consistente nel sostituire il valore nodale  $u_j^n$  in (1.4) con la media dei valori nodali precedente  $u_{j-1}^n$  e successivo  $u_{j+1}^n$ .

Il metodo LW si può derivare applicando dapprima lo sviluppo di Taylor rispetto alla variabile temporale:

$$u^{n+1} = u^n + (\partial_t u)^n \Delta t + (\partial_{tt} u)^n \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3),$$

ove  $(\partial_t u)^n$  indica la derivata parziale di  $u$  nel tempo  $t^n$ . Quindi, usando l'equazione (1.1), si sostituisce  $\partial_t u$  con  $-a \partial_x u$ , e  $\partial_{tt} u$  con  $a^2 \partial_{xx} u$ . Trascurando il resto  $O(\Delta t^3)$  ed approssimando le derivate spaziali con differenze finite centrate, si perviene alla (1.8). Infine, il metodo U si ottiene discretizzando il termine convettivo  $a \partial_x u$  dell'equazione con la differenza finita upwind.

Tutti gli schemi precedentemente introdotti sono espliciti. Un esempio di metodo implicito è il seguente:

#### 5. Eulero all'indietro/centrato (EI/C)

$$u_j^{n+1} + \frac{\lambda}{2} a(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n. \quad (1.12)$$

Naturalmente, anche gli schemi impliciti si possono scrivere in una forma generale simile alla (1.3) in cui  $H^n$  sia sostituito da  $H^{n+1}$ . Nel caso specifico, il flusso numerico sarà ancora definito dalla (1.5).

Il vantaggio della formulazione (1.3) è che essa può essere estesa facilmente al caso dei problemi iperbolici più generali.

## 1.3 Analisi dei metodi alle differenze finite

Analizziamo le proprietà di consistenza, stabilità e dissipazione dei metodi alle differenze finite precedentemente introdotti.

### 1.3.1 Consistenza e convergenza

Per un dato schema numerico, l'errore di troncamento locale è l'errore che si genera pretendendo che la soluzione esatta verifichi lo schema numerico stesso.

Ad esempio, nel caso dello schema (1.4), indicata con  $u$  la soluzione del problema esatto (1.1), possiamo definire l'errore di troncamento nel punto  $(x_j, t^n)$  come segue:

$$\tau_j^n = \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + a \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2h}.$$

Se l'errore di troncamento:

$$\tau(\Delta t, h) = \max_{j,n} |\tau_j^n|,$$

tende a zero quando  $\Delta t$  e  $h$  tendono a zero, indipendentemente, allora lo schema numerico è detto *consistente*.

Si dice inoltre che uno schema numerico è *accurato all'ordine  $p$  in tempo e all'ordine  $q$  in spazio* (per opportuni interi  $p$  e  $q$ ), se per una soluzione sufficientemente regolare del problema esatto, si ha:

$$\tau(\Delta t, h) = O(\Delta t^p + h^q).$$

Utilizzando gli sviluppi di Taylor in modo opportuno, si può allora vedere che l'errore di troncamento dei metodi precedentemente introdotti si comporta come segue:

6. **Eulero in avanti o all'indietro/centrato:**  $O(\Delta t + h)$ ;

7. **Upwind:**  $O(\Delta t + h)$ ;

8. **Lax – Friedrichs:**  $O\left(\frac{h^2}{\Delta t} + \Delta t + h^2\right)$ ;

9. **Lax – Wendroff:**  $O(\Delta t^2 + h^2 + h^2 \Delta t)$ .

Diciamo che uno schema è *convergente* (nella norma del massimo) se:

$$\lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} (\max_{j,n} |u(x_j, t^n) - u_j^n|) = 0.$$

### 1.3.2 Stabilità

Diremo che un metodo numerico per un problema iperbolico (lineare o non lineare) è *stabile* se per ogni tempo  $T$  esistono una costante  $C_T > 0$  (eventualmente dipendente da  $T$ ) e un  $\delta_0 > 0$  tali che:

$$\|\mathbf{u}^n\|_{\Delta} \leq C_T \|\mathbf{u}^0\|_{\Delta}, \quad (1.13)$$

per ogni  $n$  tale che  $n\Delta t \leq T$ , per ogni  $\Delta t, h$  tali che  $0 < \Delta t \leq \delta_0$ ,  $0 < h \leq \delta_0$  e per ogni dato iniziale  $\mathbf{u}_0$ . Si noti che  $C_T$  non deve dipendere da  $\Delta t$  e  $h$ . Spesso la stabilità richiede una condizione che lega il passo temporale a quello spaziale.

La  $\|\cdot\|_{\Delta}$  rappresenta una norma discreta opportuna, ad esempio:

$$\|\mathbf{v}\|_{\Delta, p} = \left( h \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{per } p = 1, 2, \quad \|\mathbf{v}\|_{\Delta, \infty} = \sup_j |v_j|. \quad (1.14)$$

Si noti come  $\|\mathbf{v}\|_{\Delta, p}$  rappresenti un'approssimazione della norma  $L^p(\square)$ , per  $p = 1, 2$  o  $+\infty$ .

Lo schema implicito di Eulero all'indietro/centrato (1.12) è stabile nella norma  $\|\cdot\|_{\Delta, 2}$  per una qualunque scelta dei parametri  $\Delta t$  e  $h$ .

Nel caso in cui si abbia:

$$\|\mathbf{u}^n\|_{\Delta} \leq \|\mathbf{u}^{n-1}\|_{\Delta}, \quad n \geq 1, \quad (1.15)$$

(il che implica che la (1.15) sia verificata con  $C_T = 1$ ) lo schema è detto *fortemente stabile* rispetto alla norma.  $\|\cdot\|_{\Delta}$

**Osservazione 1.1** Molto spesso nel contesto di problemi iperbolici si cercano soluzioni per tempi lunghi (cioè per  $T \gg 1$ ). In questi casi è normalmente richiesta la forte stabilità dello schema, in quanto essa garantisce che la soluzione numerica sia limitata per ogni valore di  $T$ .

Come vedremo, condizione necessaria affinché uno schema numerico esplicito della forma (1.3) sia stabile, è che il passo di discretizzazione temporale e quello spaziale siano legati tra loro dalla seguente relazione:

$$|a\lambda| \leq 1, \text{ ovvero } \Delta t \leq \frac{h}{|a|}, \quad (1.16)$$

che viene detta *condizione CFL* (da Courant, Friedrichs e Lewy) ed il numero  $a\lambda$  viene comunemente chiamato *numero di CFL*. Esso è un numero adimensionale (essendo  $a$  una velocità).

L'interpretazione geometrica della condizione di stabilità CFL è la seguente. In uno schema alle differenze finite, il valore di  $u_j^{n+1}$  dipende, in generale, dai valori di  $u^n$  nei tre punti  $x_{j+i}$ ,  $i = -1, 0, 1$ .

1. Allora la soluzione  $u_j^{n+1}$  dipenderà solo dai dati iniziali nei punti  $x_{j+i}$ , per  $i = -(n+1), \dots, (n+1)$ .

Il cosiddetto *dominio di dipendenza numerico*  $D_{\Delta t}(x_j, t^n)$  di  $u_j^n$  verificherà, quindi:

$$D_{\Delta t}(x_j, t^n) \subset \left\{ x \in \square : |x - x_j| \leq nh = \frac{t^n}{\lambda} \right\}.$$

Conseguentemente, per ogni punto fissato  $(\bar{x}, \bar{t})$  si ha:

$$D_{\Delta t}(\bar{x}, \bar{t}) \subset \left\{ x \in \square : |x - \bar{x}| \leq \frac{\bar{t}}{\lambda} \right\}.$$

In particolare, prendendo il limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ , e fissando  $\lambda$ , il dominio di dipendenza numerico diventa:

$$D_0(\bar{x}, \bar{t}) = \left\{ x \in \square : |x - \bar{x}| \leq \frac{\bar{t}}{\lambda} \right\}.$$

La condizione (1.16) è allora equivalente all'inclusione:

$$D(\bar{x}, \bar{t}) \subset D_0(\bar{x}, \bar{t}), \quad (1.17)$$

dove  $D(\bar{x}, \bar{t})$  è il dominio di dipendenza definito come:

$$D(\bar{x}, \bar{t}) = \{ x \in \square \mid x = \bar{x} - \lambda_k \bar{t}, k = 1, \dots, p \}. \quad (1.18)$$

Si noti che nel caso scalare,  $p = 1$  e  $\lambda_1 = a$ .

**Osservazione 1.2** La condizione di CFL stabilisce, in particolare, che non esistono schemi alle differenze finite espliciti, incondizionatamente stabili e consistenti per problemi ai valori iniziali iperbolici. Infatti, se fosse violata la condizione di CFL, esisterebbe almeno un punto  $x^*$  nel dominio di dipendenza non appartenente al dominio di dipendenza numerico. Cambiando il dato iniziale in  $x^*$  muterà allora solo la soluzione esatta e non quella numerica. Questo implica una non-convergenza del metodo e quindi anche la sua instabilità dato che, per un metodo consistente, il Teorema di equivalenza di Lax-Richtmyer afferma che la stabilità è condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo consistente.

**Osservazione 1.3** Nel caso in cui  $a = a(x, t)$  non sia più costante nella (1.1), la condizione di CFL diventa:

$$\Delta t \leq \frac{h}{\sup_{x \in \square, t > 0} |a(x, t)|},$$

e se anche il passo di discretizzazione spaziale viene fatto variare si ha:

$$\Delta t \leq \min_k \frac{h_k}{\sup_{x \in (x_k, x_{k+1}), t > 0} |a(x, t)|},$$

essendo  $h_k = x_{k+1} - x_k$ .

Facendo riferimento al sistema iperbolico:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, & t > 0, \quad x \in \square, \\ \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x), & x \in \square \end{cases} \quad (1.19)$$

la condizione di stabilità CFL, del tutto analoga alla (1.16), sarà:

$$\left| \lambda_k \frac{\Delta t}{h} \right| \leq 1, \quad k = 1, \dots, p,$$

dove  $\{\lambda_k, k = 1, \dots, p\}$  sono gli autovalori di  $A$ . Equivalentemente,  $\Delta t \leq \frac{h}{\max_k |\lambda_k|}$ .

Anche questa condizione può scriversi nella forma (1.17), nel caso che ogni retta  $x = \bar{x} - \lambda_k(\bar{t} - t)$ ,  $k = 1, \dots, p$ , intersechi la retta temporale  $t = \bar{t} - \Delta t$  in punti  $x^{(k)}$  appartenenti al dominio di dipendenza numerico.

**Teorema 1.1** *Se la condizione di CFL (1.16) è soddisfatta, gli schemi upwind, di Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff sono fortemente stabili nella norma  $\|\cdot\|_{\Delta,1}$ .*

**Teorema 1.2** *Lo schema di Eulero all'indietro è fortemente stabile nella norma  $\|\cdot\|_{\Delta,2}$ , senza alcuna restrizione su  $\Delta t$ . Quello di Eulero in avanti, invece, non è mai fortemente stabile. Tuttavia esso è stabile con costante  $C_T = e^{T/2}$  pur di assumere che  $\Delta t$  soddisfi la seguente condizione (più restrittiva della condizione CFL)*

$$\Delta t \leq \left( \frac{h}{a} \right)^2.$$

## 2 Cenni a problemi iperbolici non lineari

### 2.1 Equazioni scalari

Consideriamo la seguente equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0 \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.20)$$

dove  $F$  è una funzione non lineare di  $u$ . Essa è detta *flusso* di  $u$  in quanto su ogni intervallo  $(\alpha, \beta)$  di  $\mathbb{R}$  è verificata la seguente relazione:

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} u(x, t) dx = F(u(t, \alpha)) - F(u(t, \beta)).$$

Per tale ragione la (1.20) esprime una *legge di conservazione*. Un esempio classico è costituito dall'equazione di Burgers in cui  $F(u) = u^2/2$ . Tale equazione in forma non conservativa si può scrivere (finché la soluzione resta regolare) come:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.21)$$

L'equazione delle linee caratteristiche per la (1.21) è  $x'(t) = u$ , ma poiché  $u$  è costante sulle caratteristiche, si ottiene  $x'(t) = \text{costante}$ , cioè le caratteristiche sono delle rette. Esse sono definite nel piano  $(x, t)$  dalla mappa  $t \rightarrow (x + tu_0(x), t)$ , e la soluzione è definita implicitamente da  $u(x + tu_0(x)) = u_0(x)$ ,  $\forall t < t_c$ , essendo  $t_c$  un valore critico del tempo in cui per la prima volta tali caratteristiche si intersecano. Ad esempio, se  $u_0 = (1 + x^2)^{-1}$ ,  $t_c = 8/\sqrt{27}$ .

In effetti, se  $u_0(x)$  è negativa in qualche punto, posto:

$$t_c = -\frac{1}{\min u_0'(x)},$$

per  $t > t_c$  non può esistere alcuna soluzione classica (ovvero di classe  $C^1$ ), in quanto:

$$\lim_{t \rightarrow t_c} \left( \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) = -\infty.$$

Consideriamo la Fig. 2.1: si nota come per  $t = t_c$  la soluzione presenti una discontinuità.

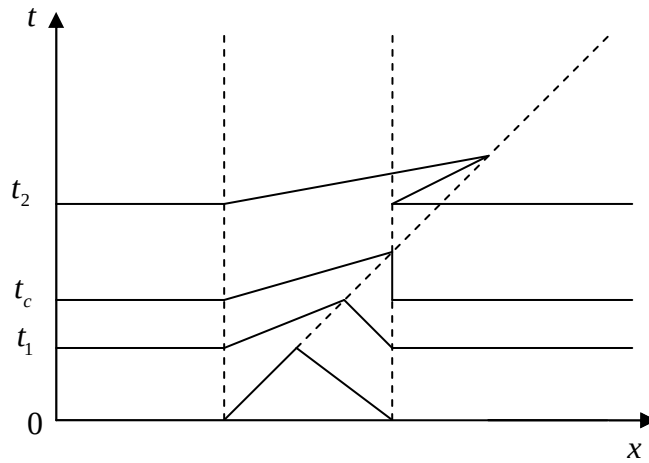


**Figura 2.1.** Sviluppo della singolarità

Per ovviare a questa perdita di unicità si introduce il concetto di *soluzione debole* per le equazioni iperboliche: diciamo che  $u$  è una soluzione debole di (1.20) se soddisfa la relazione differenziale (1.20) in tutti i punti  $x \in \mathbb{R}$  ad eccezione di quelli in cui è discontinua. In questi ultimi non si pretende più che valga la (1.20) (non avrebbe alcun senso derivare una funzione discontinua), ma si esige che si verificata la seguente condizione di *Rankine-Hugoniot*:

$$F(u_r) - F(u_l) = \sigma(u_r - u_l), \quad (1.22)$$

dove  $u_r$  e  $u_l$  indicano, rispettivamente, il limite destro e sinistro di  $u$  nel punto di discontinuità, e  $\sigma$  è la velocità di propagazione della discontinuità. La condizione (1.22) esprime dunque il fatto che il salto dei flussi è proporzionale al salto della soluzione.

Le soluzioni deboli non sono necessariamente uniche: tra di esse quella fisicamente corretta è la cosiddetta *soluzione entropica*.

Come vedremo più avanti, nel caso dell'equazione di Burgers la soluzione entropica si ottiene come limite, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , della soluzione  $u^\varepsilon(x, t)$  dell'equazione avente un termine di perturbazione viscoso:

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(u^\varepsilon) = \tau \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

con  $u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x)$ .

In generale, possiamo dire che:

10. se  $F(u)$  è differenziabile, una discontinuità che si propaga con velocità  $\sigma$  data dalla (1.22), soddisfa la condizione di entropia se:

$$F'(u_l) \geq \sigma \geq F'(u_r);$$

11. se  $F(u)$  non è differenziabile, una discontinuità che si propaga con velocità  $\sigma$  data dalla (1.22), soddisfa la condizione di entropia se:

$$\frac{F(u) - F(u_l)}{u - u_l} \geq \sigma \geq \frac{F(u) - F(u_r)}{u - u_r},$$

per ogni  $u$  compresa tra  $u_r$  e  $u_l$ .

**Esempio 2.1** Consideriamo l'equazione di Burgers con la condizione iniziale seguente:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0, \\ u_r, & x > 0, \end{cases}$$

dove  $u_r$  e  $u_l$  sono due costanti. Se  $u_l > u_r$ , allora esiste una sola soluzione debole (che è entropica):

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l, & x < \sigma t, \\ u_r, & x > \sigma t, \end{cases} \quad (1.23)$$

dove  $\sigma = (u_l + u_r)/2$  è la velocità di propagazione della discontinuità (detta anche *shock*). In questo caso le caratteristiche “entrano” nello shock (si veda la Fig. 2.2).

Nel caso  $u_l < u_r$  ci sono infinite soluzioni deboli: una ha ancora la forma (1.23), ma in questo caso le caratteristiche *escono* dalla discontinuità (si veda Fig. 2.3). Tale soluzione è instabile, ovvero piccole perturbazioni sui dati cambiano in modo sostanziale la soluzione stessa. Un'altra soluzione debole è:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x < u_l t, \\ \frac{x}{t} & u_l t \leq x \leq u_r t, \\ u_r & x > u_r t. \end{cases}$$

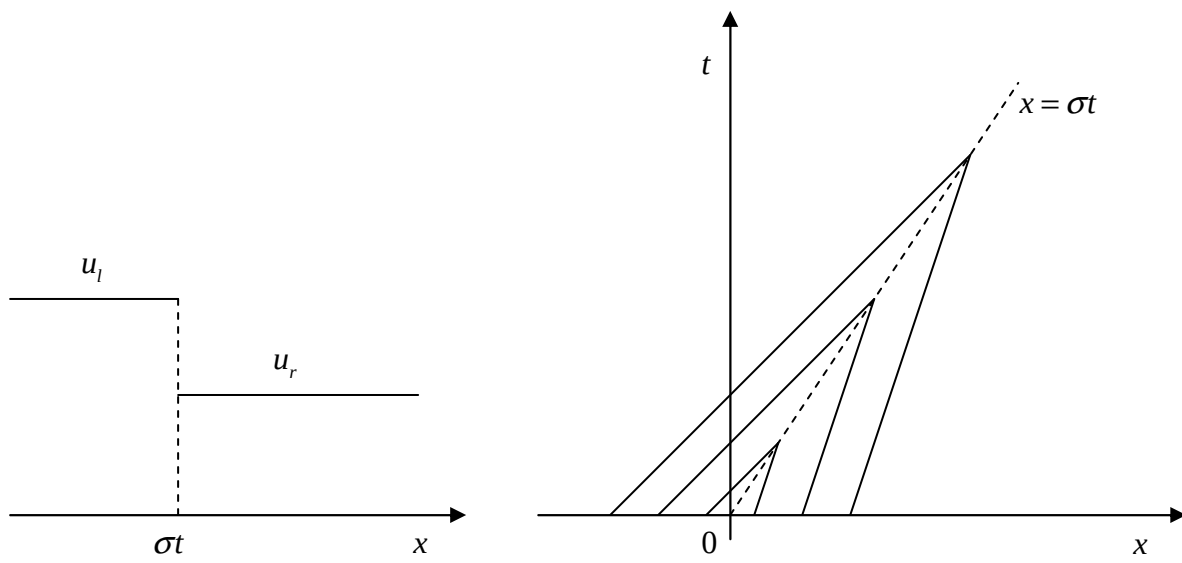


**Figura 2.2.** Soluzione entropica per l'equazione di Burgers

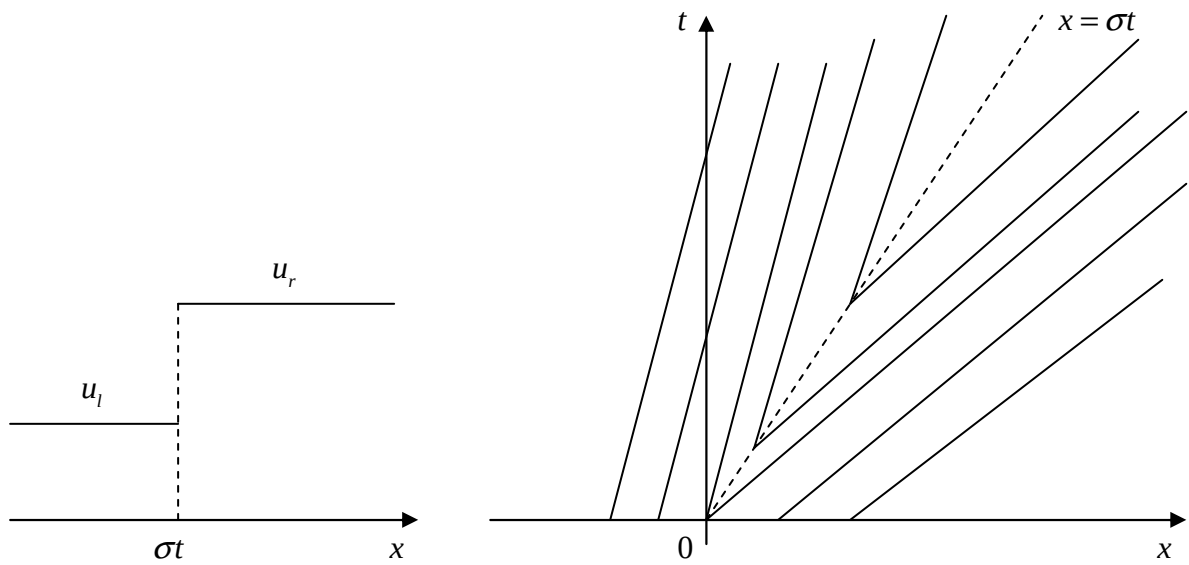


**Figura 2.3.** Soluzione non entropica per l'equazione di Burgers

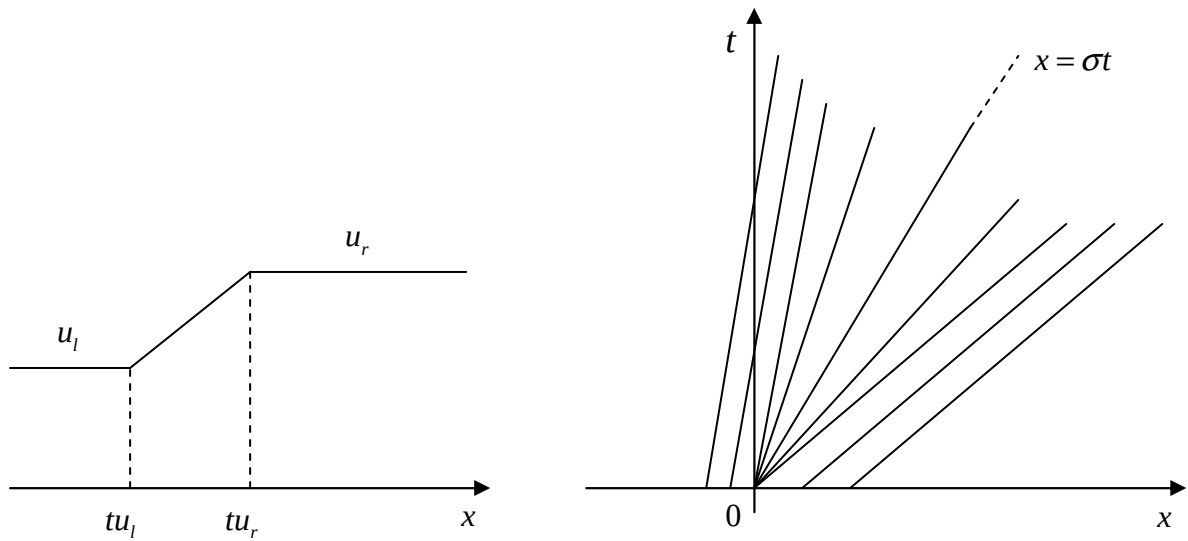


**Figura 2.4.** Onda di rarefazione

Tale soluzione, che descrive un'onda di rarefazione, a differenza della precedente, è entropica (si veda Fig. 2.4).  $\square$

Introduciamo ora il concetto di funzione entropia e flusso entropico. Si dice che un problema iperbolico (1.20) possiede una funzione entropia se esistono una funzione strettamente convessa  $\eta = \eta(u)$  ed una funzione  $\psi = \psi(u)$  tali che:

$$\psi'(u) = \eta'(u)F'(u).$$

La funzione  $\eta$  è detta *entropia* e  $\psi$  è detta *flusso d'entropia*. Si ricorda che una funzione  $\eta$  si dice convessa se per ogni  $u$  e  $w$  distinti e  $\theta \in (0,1)$  si ha:

$$\eta(u + \theta(w - u)) < (1 - \theta)\eta(u) + \theta\eta(w).$$

Se  $\eta$  possiede derivata seconda continua, ciò è equivalente a richiedere che  $\eta'' > 0$ .

**Osservazione 2.1** Quella qui presentata è una definizione “matematica” di entropia. Nel caso in cui (1.20) governi un fenomeno fisico, è spesso possibile definire una “entropia termodinamica”. Essa risulta anche essere effettivamente un'entropia del problema differenziale nel senso precedentemente descritto.

La forma quasi lineare della (1.20) è data da:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.24)$$

Se  $u$  è sufficientemente regolare, moltiplicando (1.24) per  $\eta'(u)$  si verifica facilmente che  $\eta$  soddisfa una *legge di conservazione* del tipo:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(u) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(u) = 0. \quad (1.25)$$

Per un'equazione scalare è in genere possibile trovare diverse coppie di funzioni  $\eta$  e  $\psi$  che soddisfino le condizioni date.

Le operazioni illustrate per derivare (1.25) sono valide solo se  $u$  è regolare, in particolare se non vi sono discontinuità nella soluzione. Si possono però trovare le condizioni che l'entropia deve soddisfare in corrispondenza di una discontinuità nella soluzione di (1.20) quando tale equazione rappresenti il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  della seguente equazione modificata (detta *equazione di viscosità*):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.26)$$

La soluzione di (1.26) è regolare per ogni  $\tau > 0$ , ed effettuando le stesse operazioni usate precedentemente si può scrivere:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(u) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(u) = \varepsilon \eta'(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \varepsilon \eta''(u) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

Integrando ora su un generico intervallo  $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t}(u) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(u) \right] dx dt &= \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \left[ \eta'(u(x_2, t)) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) - \eta'(u(x_1, t)) \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) \right] dt \\ &\quad - \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \eta''(u) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt = R_1(\varepsilon) + R_2(\varepsilon), \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned} R_1(\varepsilon) &= \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \left[ \eta'(u(x_2, t)) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) - \eta'(u(x_1, t)) \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) \right] dt, \\ R_2(\varepsilon) &= -\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \eta''(u) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt. \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} R_1(\varepsilon) = 0,$$

Mentre, se la soluzione per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  del problema modificato presenta una discontinuità lungo una curva del piano  $(x,t)$ , si ha che:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} R_2(\varepsilon) \neq 0,$$

dato che l'integrale contenente il termine  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$  è, in generale, non limitato.

D'altra parte  $R_2(\varepsilon) \leq 0$  per ogni  $\varepsilon > 0$ , essendo  $\partial^2 \eta / \partial u^2 > 0$ , dunque la soluzione debole al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  soddisfa:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t}(u) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(u) \right] dx dt \leq 0, \quad \forall x_1, x_2, t_1, t_2. \quad (1.27)$$

In altre parole si ha:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(u) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(u) \leq 0, \quad t > 0, \quad x \in \square$$

in senso debole.

Vi è ovviamente una relazione tra quanto appena visto e la nozione di soluzione entropica. Se l'equazione differenziale ammette una funzione entropia  $\eta$ , allora una soluzione debole è una soluzione entropica se e solo se  $\eta$  soddisfa (1.27). In altre parole, le soluzioni entropiche sono soluzioni limite del problema modificato (1.26) per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

## 2.2 Approssimazione alle differenze finite

Ritorniamo a considerare l'equazione iperbolica non lineare (1.20), con la condizione iniziale:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \square.$$

Indichiamo con  $a(u) = F'(u)$  la velocità caratteristica.

Anche per questo problema possiamo usare uno schema esplicito alle differenze finite della forma seguente:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda (H_{j+1/2}^n - H_{j-1/2}^n), \quad (1.28)$$

dove  $H_{j+1/2}^n = H(u_j^n, u_{j+1}^n)$  e  $H(\cdot, \cdot)$  è il *flusso numerico*.

L'interpretazione funzionale del flusso numerico è la seguente:

$$H_{j+1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(u(x_{j+1/2}, t)) dt,$$

ovvero  $H_{j+1/2}^n$  approssima il flusso medio attraverso  $x_{j+1/2}$  nell'intervallo di tempo  $[t^n, t^{n+1}]$ . Per avere consistenza, il flusso numerico deve verificare:

$$H(\bar{u}, \bar{u}) = F(\bar{u}), \quad (1.29)$$

nel caso in cui  $\bar{u}$  sia una costante. Lax e Wendroff hanno dimostrato che, sotto l'ipotesi (1.29), le funzioni  $u$  tali che:

$$u(t^n, x_j) = \lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} u_j^n,$$

sono soluzioni deboli del problema di partenza.

Sfortunatamente, però, non è assicurato che le soluzioni ottenute in questa maniera soddisfino la condizione di entropia (ovvero non è detto che le soluzioni deboli siano anche soluzioni entropiche).

Al fine di “recuperare” le soluzioni entropiche, gli schemi numerici devono introdurre un'adeguata diffusione numerica, come suggerito dall'analisi della Sez. 2.1.

Riscriviamo a tal fine la (1.28) nella forma:

$$u_j^{n+1} = G(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n), \quad (1.30)$$

e introduciamo alcune definizioni.

- Lo schema numerico (1.30) è detto *monotono* se  $G$  è una funzione monotona crescente in ognuno dei suoi argomenti.
- Lo schema numerico (1.30) è detto *limitato* se esiste  $C > 0$  tale che  $\sup_{j,n} |u_j^n| \leq C$ .
- Lo schema numerico (1.30) è detto *stabile* se le soluzioni alle differenze finite  $\mathbf{u}^n$  e  $\mathbf{v}^n$ , ottenute a partire da due dati iniziali differenti  $\mathbf{u}^0$  e  $\mathbf{v}^0$ , verificano:

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n\|_{\Delta} \leq C_T \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{v}^0\|_{\Delta},$$

per ogni  $n \geq 0$  tale che  $n\Delta t \leq T$  per ogni  $\Delta t$  e  $h$  sufficientemente piccoli. La costante  $C_T$  è indipendente da  $\Delta t$  e  $h$ , e  $\|\cdot\|_{\Delta}$  è un'opportuna norma discreta, come quelle introdotte in (1.14). Si noti che per problemi lineari questa definizione è equivalente alla (1.13). Si parlerà di stabilità forte quando si può prendere  $C_T = 1$  per ogni  $T > 0$ .

Ad esempio, ponendo, per semplicità  $F_j = F(u_j)$ , lo schema di Lax-Friedrichs corrisponde a prendere:

$$H_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left[ F_{j+1} + F_j - \frac{1}{\lambda} (u_{j+1} - u_j) \right],$$

nella (1.28).

Si dimostra che questo metodo è consistente, stabile e monotono, purchè valga la seguente condizione (analoga alla condizione CFL già vista nel caso lineare):

$$\left|F'(u_j^n)\right|\frac{\Delta t}{h} \leq 1, \quad \forall j \in \square \quad \forall n \in \square. \quad (1.31)$$

N.N. Kuznetsov ha dimostrato che schemi monotoni del tipo (1.30) sono limitati, stabili, convergenti alla soluzione entropica e hanno un'accuratezza al massimo del primo ordine sia rispetto al tempo che allo spazio, ovvero:

$$\max_j |u_j^n - u(x_j, t_n)| \leq C(\Delta t + h).$$

Essi sono in genere troppo dissipativi e non generano soluzioni accurate e meno che non si usino griglie molto raffinate.

Schemi di ordine più elevato (i cosiddetti *high order shock capturing schemes*) sono stati sviluppati usando tecniche che permettono di calibrare la dissipazione numerica in funzione della regolarità locale della soluzione, al fine di risolvere correttamente le discontinuità (assicurando la convergenza a soluzioni entropiche ed evitando oscillazioni spurie) utilizzando globalmente una dissipazione numerica minima.

## 2.3 Approssimazione con elementi finiti discontinui

Per la discretizzazione del problema (1.20) consideriamo ora l'approssimazione spaziale basata su elementi finiti discontinui. Cerchiamo per ogni  $t > 0$ ,  $u_h(t) \in W_h$  tale che si abbia  $\forall j = 0, \dots, m-1$  e  $\forall v_h \in \mathbb{P}_r(I_j)$

$$\int_{I_j} \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h dx - \int_{I_j} F(u_h) \frac{\partial v_h}{\partial x} dx + H_{j+1}(u_h) v_h^-(x_{j+1}) - H_j(u_h) v_h^+(x_j) = 0, \quad (1.32)$$

essendo  $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ . Il dato iniziale  $u_h^0$  è fornito dalle relazioni:

$$\int_{I_j} u_h^0 v_h dx = \int_{I_j} u_h v_h dx, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

La funzione  $H_j$  denota ora il flusso numerico non lineare nel nodo  $x_j$  e dipende dai valori di  $u_h$  in  $x_j$ , ovvero:

$$H_j(u_h(t)) = H_j(u_h^-(x_j, t), u_h^+(x_j, t)). \quad (1.33)$$

Se  $j = 0$  si dovrà porre  $u_h^-(x_0, t) = \phi(t)$ , che è il dato al bordo nell'estremo di sinistra (ammesso naturalmente che questo sia il punto di inflow).

Osserviamo che esistono varie possibilità di scelte per la funzione  $H$ . Vogliamo tuttavia che tali scelte diano luogo in (1.32) a schemi che siano perturbazioni di schemi *monotoni*. Questi ultimi, infatti, pur essendo solo del primo ordine, sono stabili e convergono alla soluzione entropica. Precisamente, pretendiamo che (1.32) sia uno schema monotono quando  $r = 0$ . In tal caso, detto  $u_h^{(j)}$  il valore costante di  $u_h$  su  $I_j$ , la (1.32) diventa:

$$h_j \frac{\partial}{\partial t} u_h^{(j)}(t) + H(u_h^{(j)}(t), u_h^{(j+1)}(t)) - H(u_h^{(j-1)}(t), u_h^{(j)}(t)) = 0, \quad (1.34)$$

con dato iniziale  $u_h^{0,(j)} = h_j^{-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u_0 dx$  nell'intervallo  $I_j$ ,  $j = 0, \dots, m-1$ , avendo indicato con

$h_j = x_{j+1} - x_j$  l'ampiezza di  $I_j$ .

Affinché lo schema (1.34) sia monotono, il flusso  $H$  deve essere monotono, il che equivale a dire che  $H(v, w)$  è:

1. Una funzione Lipschitziana dei suoi argomenti;
2. Una funzione non decrescente in  $v$  e non crescente in  $w$ ;
3. Consistente con il flusso  $F$ , ovvero  $H(\bar{u}, \bar{u}) = F(\bar{u})$ , per ogni costante  $\bar{u}$ .

Alcuni celebri esempi di flusso monotono sono i seguenti:

### 1. Flusso di Godunov

$$H(v, w) = \begin{cases} \min_{v \leq u \leq w} F(u) & v \leq w, \\ \max_{v \leq u \leq w} F(u) & v > w; \end{cases}$$

### 2. Flusso di Engquist-Osher

$$H(v, w) = \int_0^v \max(F'(u), 0) du + \int_0^w \min(F'(u), 0) du + F(0);$$

### 3. flusso di Lax-Friedrichs

$$H(v, w) = \frac{1}{2} [F(v) + F(w) - \delta(w - v)], \quad \delta = \max_{\inf_X u_0(x) \leq u \leq \sup_X u_0(x)} |F'(u)|.$$

Il flusso di Godunov è quello che dà luogo alla minor quantità di dissipazione numerica, quello di Lax-Friedrichs è il meno costoso. Tuttavia l'esperienza numerica suggerisce che se il grado  $r$  aumenta, la scelta del flusso  $H$  non ha conseguenze significative sulla qualità dell'approssimazione. Nel caso lineare, in cui  $F(u) = au$ , tutti i flussi precedenti coincidono e sono uguali al "flusso upwind":

$$H(v, w) = a \frac{v+w}{2} - \frac{|a|}{2} (w-v).$$

### 3 Metodo numerico per modello TLC

L'equazione che descrive la dinamica della rete,  $u_t + F(u)_x = 0$ , è stata discretizzata usando il metodo di Godunov ed il metodo cinetico. In particolare il metodo di Godunov, essendo basato proprio sulla soluzione dei problemi di Riemann, risulta essere il più adatto ad essere sviluppato per le reti. Si nota tuttavia che Godunov è uno schema del primo ordine, quindi la convergenza non è molto veloce, ed inoltre da origine ad una non piccola diffusività numerica. Di contro il metodo cinetico è un metodo del secondo ordine e la convergenza risulta essere veloce a differenza del primo.

#### 3.1 Metodo di Godunov

Il metodo di Godunov è stato introdotto nel 1959 per la risoluzione dell'equazione di Eulero per i gas dinamici in presenza di onde di shock.

Definiamo una griglia numerica in  $\mathbf{R}^N \times (0, T)$  usando le seguenti notazioni:

- $\Delta x$  è l'ampiezza spaziale della griglia;
- $\Delta t$  è l'ampiezza temporale della griglia;
- $(x_m, t_n) = (m\Delta x, n\Delta t)$  per  $n \in \mathbf{N}$  e  $m \in \mathbf{Z}$  sono i punti della griglia.

Per una funzione  $v$  definita sulla griglia, definiamo  $v_m^n = v(x_m, t_n)$ . Utilizziamo anche la notazione  $u_m^n$  per  $u(x_m, t_n)$ , quando  $u$  è una funzione continua nel piano  $(x, t)$  e  $(v)_{m,n}$  per  $m$  ed  $n$  che variano su un sottoinsieme di  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{N}$ , rispettivamente.

Il metodo di Godunov si basa sulla soluzione di problemi di Riemann locali. In generale, la soluzione (unica) del problema di Riemann

$$u_t + F(u)_x = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in [0, T],$$

con dato iniziale

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_l & \text{se } x < 0, \\ u_r & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

è self - similar, ovvero

$$u(x, t) = W_R(x/t; u_l, u_r),$$

dove  $W_R$  dipende solo dalla funzione di flusso  $F$  ed è composta da due stati costanti  $u_l$  e  $u_r$ , separati da varie onde che partono dall'origine e le cui velocità sono limitate da

$$\max \left\{ \left| F'(\xi) \right|, \xi \text{ tra } u_l \text{ e } u_r \right\}.$$

Cerchiamo una soluzione approssimata di tale problema.

Assegniamo un dato iniziale  $u_0(x)$  e approssimiamolo mediante  $v^\Delta$ , che rappresenta una funzione costante a tratti definita in  $\mathbf{R} \times (0, +\infty)$ .

### Primo passo.

Il dato iniziale viene approssimato dalla sequenza  $v^0 = (v_m^0)$  nel seguente modo:

$$v_m^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} u_0(x) dx. \quad (1.35)$$

Allora, la funzione  $v_\Delta$  è:

$$v_\Delta^\Delta(x) = v_m^0, \quad x \in (x_{m-1/2}, x_{m+1/2}), \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Analogamente, data un'approssimazione  $v_m^n$  di  $u$  al tempo  $t = t_n$ , poniamo:

$$v_\Delta^\Delta(x, t_n) = v_m^n, \quad x \in (x_{m-1/2}, x_{m+1/2}), \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Lo schema definisce  $v_m^n$  ricorsivamente a cominciare da  $v_m^0$ .

Sia  $v^\Delta(x, t)$  la soluzione del problema:

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x F(v) = 0, & x \in \square, t \in (t_n, t_{n+1}), \\ v(x, t_n) = v_\Delta^\Delta(x, t_n) \end{cases} \quad (1.36)$$

Dato che  $v_\Delta$  appartiene a  $L^\infty(\mathbf{R})$ , il problema ammette un'unica soluzione entropica, che può essere determinata esplicitamente almeno per  $\Delta t$  sufficientemente piccolo.

Si noti che se:

$$\Delta t \sup_{m,n} \left\{ \sup_{u \in I(u_{m-1/2}^n, u_{m+1/2}^n)} \left| F'(u) \right| \right\} \leq \frac{1}{2} \Delta x, \quad (1.37)$$

un'onda, partendo da  $x_{m-1/2}$ , non raggiungerà le linee  $x = x_{m-1}$  e  $x = x_m$  prima del tempo  $t_{n+1}$ .

### Secondo passo.

Definiamo ora:

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} v^\Delta(x, t_{n+1}) dx, \quad (1.38)$$

che rappresenta la proiezione della soluzione esatta su una funzione costante a tratti. Per ottenere un'espressione semplice per  $v_m^{n+1}$ , usiamo la formula di Gauss - Green per integrare la (1.38) sulla cella  $(x_{m-1/2}, x_{m+1/2}) \times (0, \Delta t)$ . Questo è possibile perchè  $u$  è una funzione costante a tratti regolare e soddisfa la condizione di Rankine - Hugoniot in corrispondenza delle discontinuità. Si ha che

$$0 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} (\partial_t v + \partial_x F(v)) dx dt = \int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} [v(x, t_{n+1}) - v(x, t_n)] dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [F(v(x_{m-1/2}, t)) - F(v(x_{m+1/2}, t))] dt.$$

Sotto la condizione CFL

$$\Delta t \sup_{m,n} \left\{ \sup_{u \in I(u_{m-1/2}^n, u_{m+1/2}^n)} |F'(u)| \right\} \leq \Delta x, \quad (1.39)$$

le onde non influenzano la soluzione in  $x = x_{m+1/2}$ , per  $t \in (t_n, t_{n+1})$ . Quindi, le soluzioni sono localmente date dai problemi di Riemann e, in particolare, il flusso in  $x = x_{m+1/2}$  per  $t \in (t_n, t_{n+1})$  è dato da:

$$F(u(x_m, t)) = F(W_R(0; v_{m-1}^n, v_m^n)).$$

Poichè il flusso è invariante rispetto al tempo e continuo, possiamo portarlo fuori dal segno di integrale e ottenere:

$$v_m^{n+1} = v_m^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F(W_R(0; v_m^n, v_{m+1}^n)) - F(W_R(0; v_{m-1}^n, v_m^n)) \right). \quad (1.40)$$

Abbiamo che:

$$g^G(u, v) = F(W_R(0; u, v)),$$

così che il flusso numerico  $g^G$  ha l'espressione:

$$g^G(u, v) = \begin{cases} \min_{w \in [u, v]} F(w) & \text{se } u \leq v, \\ \max_{w \in [u, v]} F(w) & \text{se } v \leq u. \end{cases}$$

In particolare, per il flusso stiamo considerando:

$$g^G(u, v) = \begin{cases} \min(F(u), F(v)) & \text{se } u \leq v, \\ F(u) & \text{se } v < u < \sigma, \\ F(\sigma) & \text{se } v < \sigma < u, \\ F(v) & \text{se } \sigma < v < u. \end{cases}$$

Lo schema, sotto la condizione (1.39) può essere scritto nella forma:

$$v_m^{n+1} = v_m^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( g^G(v_m^n, v_m^{n+1}) - g^G(v_{m-1}^n, v_m^n) \right).$$

### Condizioni al bordo

Si supponga di assegnare una condizione al bordo  $x = 0$  del tipo:

$$u(0, t) = \rho_b(t), \quad t > 0,$$

e di voler studiare l'equazione solo per  $x > 0$ . Consideriamo ora il problema:

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0, & x \in I, \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in I, \\ u_x(0, t) = u_b(t), & t \in [0, T], \end{cases}$$

dove  $I$  è un intervallo aperto contenuto in  $\mathbf{R}$ ,  $u_0 \in C^1(I)$ ,  $u_1(t) \in C^1((0, T))$ ,  $F \in C^1(\mathbf{R})$ . Non è semplice trovare una funzione  $u$  che soddisfi il problema nel senso classico, perchè, in generale, non si può assumere il dato al bordo. Ad esempio, si consideri il problema scalare

$$\begin{cases} u_t - u_x = 0, & \mathbf{R}^+ \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & \mathbf{R}^+ \times \{0\}. \end{cases} \quad (1.41)$$

Questo problema ammette un'unica soluzione globale  $u(x, t) = u_0(x+t)$  in  $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ , quindi la condizione:

$$u(0, t) = u_b(t), \quad t \geq 0 \quad (1.42)$$

non è consistente. D'altro canto, per il problema:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & \mathbf{R}^+ \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & \mathbf{R}^+ \times \{0\}, \end{cases} \quad (1.43)$$

occorre che sia imposta la condizione (1.42). Dall'esempio precedente, è evidente che la necessità di assegnare una condizione al contorno è legata alla funzione di flusso. Un modo rigoroso di assegnare una condizione al contorno è definito in [Bardos, La Roux, Nedelec, *Comm. Partial Differential Equations* **4** (1979), 1017 - 1034] e si può concludere che la condizione al contorno si applica quando  $F'(u_b) > 0$ . Quindi, abbiamo che:

$$u(0, t) = u_b(t)$$

solo per valori di  $t$  tali che  $F'(u(0,t)) > 0$ .

Nella pratica, si procede inserendo una cella fantasma e definendo:

$$v_0^{n+1} = v_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( g^G(v_0^n, v_1^n) - g^G(u_1^n, v_0^n) \right),$$

dove

$$u_1^n(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \rho_b(t) dt$$

prende il posto di  $v_{-1}^n$ .

Un dato al bordo uscente può essere trattato in maniera analoga. Sia  $x < L = x_N$ . Allora, la condizione formale è:

$$u(L, t) = \rho_2(t),$$

e quindi si ha che:

$$v_N^{n+1} = v_N^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( g^G(v_N^n, u_2^n) - g^G(v_{N-1}^n, v_N^n) \right),$$

dove

$$u_2^n(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \rho_2(t) dt$$

prende il posto di  $v_{N+1}^n$ , che è un valore della cella fantasma.

### **Condizioni alla giunzione**

Per linee entranti in un nodo, poniamo:

$$v_N^{n+1} = v_N^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \hat{\gamma}_i - g^G(v_{N-1}^n, v_N^n) \right),$$

mentre per linee uscenti, si ha che:

$$v_0^{n+1} = v_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( g^G(v_0^n, v_1^n) - \hat{\gamma}_j \right).$$

dove  $\hat{\gamma}_i$  e  $\hat{\gamma}_j$  sono i flussi massimizzati dove il sottoindice  $i$  indica le linee entranti e il sottoindice  $j$  indica le linee uscenti.

## **3.2 Metodo cinetico**

Presentiamo qui un metodo di approssimazione alternativo, che è chiamato metodo cinetico.

Descriviamo il metodo per un problema al contorno espresso dalle equazioni:

$$\begin{aligned} u_t + F(u)_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \geq 0, \\ u(0, t) &= u_b(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Abbiamo che  $u(x, t) \in \mathbf{R}$  per  $x \geq 0$ ,  $t \geq 0$ , e  $F$  è una funzione di Lipschitz continua. Un'approssimazione del problema (1.44) si ottiene risolvendo il seguente sistema di  $N$  equazioni non lineari:

$$\partial_t f_k^\varepsilon + \lambda_k \partial_x f_k^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (M_k^\varepsilon(u) - f_k^\varepsilon), \quad (1.45)$$

dove i parametri  $\lambda_k$  rappresentano delle velocità assegnate (non tutte zero),  $\varepsilon$  è un parametro maggiore di zero,  $f_k^\varepsilon : \mathbf{R}^+ \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ . Assegniamo il corrispondente dato iniziale e al bordo:

$$f_k^\varepsilon(x, 0) = M_k(u_0(x)), \quad x \in \mathbf{R}^+, \quad f_k^\varepsilon(0, t) = M_k(u_b(t)) \quad \forall \lambda_k > 0 \text{ e } t \geq 0. \quad (1.46)$$

Le funzioni  $M_k$ ,  $k = \overline{1, N}$  sono le funzioni Maxwelliane che dipendono da  $u^\varepsilon$ ,  $F$  e  $\lambda_k$ . Affinchè, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , si abbia convergenza di  $u^\varepsilon = \sum_{k=1}^N f_k^\varepsilon$  verso la soluzione della (1.44), imponiamo la seguente condizione di compatibilità:

$$\sum_{k=1}^N M_k(u) = u, \quad \sum_{k=1}^N \lambda_k M_k(u) = F(u). \quad (1.47)$$

Una condizione sufficiente per la convergenza è che  $M$  sia monotona non decrescente (MND) su  $I$ . Allora, viene soddisfatta la seguente condizione:

$$\min_k \lambda_k \leq F'(u) \leq \max_k \lambda_k, \quad \text{per tutte le } u \in I.$$

### ***Approssimazioni cinetiche***

**Modello a tre velocità.** Ragionando in merito a più velocità, si ha uno schema di approssimazione più preciso. Consideriamo  $N = 3$  e le velocità  $\lambda_3 = -\lambda_1 = \lambda > 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ . Il sistema cinetico approssimato ha le funzioni Maxwelliane individuate da:

$$M_1(u) = \frac{1}{\lambda} \begin{cases} 0, & \text{se } u \leq \frac{1}{2}, \\ u(u-1) + \frac{1}{4}, & \text{se } u \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$M_3(u) = \frac{1}{\lambda} \begin{cases} u(1-u), & \text{se } u \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4}, & \text{se } u \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$M_2(u) = \frac{1}{\lambda} \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)u + \frac{1}{\lambda}u^2, & \text{se } u \leq \frac{1}{2}, \\ \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)u - \frac{1}{\lambda}u^2 - \frac{1}{2\lambda}, & \text{se } u \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Al contorno, si impone che  $f_3(0, t) = M_3(u_b(t))$  e che le Maxwelliane siano MND.

### Schema numerico

E' possibile ottenere uno schema numerico per un problema iniziale/al contorno. Discretizziamo i dati del problema mediante una funzione costante a tratti e consideriamo, per  $k = 1, 2, 3$  :

$$f_{-1,k}^n = M_k(u_b^n), \quad 0 \leq n \leq M-1, \quad f_{m,k}^0 = M_k(u_m^0), \quad m \in \mathbf{N}. \quad (1.48)$$

$$f_{-1,k}^n = M_k(u_b^n), \quad 0 \leq n \leq M-1, \quad f_{m,k}^0 = M_k(u_m^0), \quad m \in \mathbf{N}.$$

(46)

Lo schema, scritto nella formulazione di Harten, include sia il primo sia il second'ordine di approssimazione, si legge come:

$$m \geq 0, \quad \begin{cases} f_{m,k}^{n+\frac{1}{2}} = f_{m,k}^n \left(1 - D_{m-\frac{1}{2},k}^n\right) + D_{m-\frac{1}{2},k}^n f_{m-1,k}^n, & \text{se } \lambda_k > 0, \\ f_{m,k}^{n+\frac{1}{2}} = f_{m,k}^n \left(1 - D_{m+\frac{1}{2},k}^n\right) + D_{m+\frac{1}{2},k}^n f_{m+1,k}^n, & \text{se } \lambda_k < 0. \end{cases}$$

E' necessario assegnare il valore al bordo  $f_{b,k}^n = f_{-1,k}^n$  solo per velocità positive.

Un'approssimazione del prim'ordine viene scelta con  $D_{m+\frac{1}{2},k}^n = \xi_k = |\lambda_k| \Delta t / \Delta x$  e in quel caso il sistema precedente è ben definito anche per  $m = 0$ . Come approssimazione del secondo ordine, si ha:

$$D_{m+\frac{1}{2},k}^n = \xi_k \left( 1 + \text{sgn}(\lambda_k) \Delta x \frac{1 - \xi_k}{2} \cdot \frac{(\sigma_{m+1,k}^n - \sigma_{m,k}^n)}{\Delta f_{m+\frac{1}{2},k}^n} \right),$$

dove

$$\sigma_{m,k}^n = \min \left( \frac{\Delta f_{m+\frac{1}{2},k}^n}{\Delta x}, \frac{\Delta f_{m-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta x} \right),$$

con  $\Delta f_{m+\frac{1}{2},k}^n = f_{m+1,k}^n - f_{m,k}^n$  e  $\min \text{mod}(a,b) = \min(|a|,|b|) \frac{\text{sgn}(a)+\text{sgn}(b)}{2}$ .

Se  $\Delta f_{m+\frac{1}{2},k}^n = 0$ , poniamo  $D_{m+\frac{1}{2},k}^n = \xi_k = |\lambda_k| \Delta t / \Delta x$ . Si noti che se  $\lambda_k > 0$ , la (48) è definita per  $m \geq -1$ , negli altri casi per  $m \geq 0$ . Per entrambi i casi, la restrizione sul passo temporale è

$$\max_{1 \leq k \leq N} |\lambda_k| \Delta t \leq \Delta x.$$

In accordo alle condizioni di compatibilità (1.47), troviamo l'esatta soluzione del sistema e sussiste l'identità

$$u_m^{n+1} = \sum_k f_{m,k}^{n+\frac{1}{2}} = u_m^{n+\frac{1}{2}}.$$

### Condizioni al contorno e condizioni alla giunzione

**Condizioni al contorno.** Per  $m=0$ , consideriamo per il contorno  $\sigma_{-1,k}^n = 0$ . In questo caso, la pendenza  $\sigma_{0,k}^n$  può essere definita come:

$$\sigma_{0,k}^n = \min \text{mod} \left( \frac{f_{1,k}^n - f_{0,k}^n}{\Delta x}, 2 \frac{f_{0,k}^n - M_k(u_b^n)}{\Delta x} \right), \lambda_k > 0,$$

$$\sigma_{0,k}^n = \frac{f_{1,k}^n - f_{0,k}^n}{\Delta x}, \lambda_k < 0.$$

Quando  $m=N$ , lo schema per  $\lambda_k < 0$  richiede i valori  $f_{N+1,k}^n$ ,  $f_{N+2,k}^n$  che possono essere ottenuti mediante la condizione di Neumann.

**Condizioni alla giunzione.** Al bordo destro ( $m=N$ ) di linee connesse alle giunzioni sulla destra, abbiamo bisogno di  $f_{N+1,k}^n = M_k(f^{-1}(\hat{\gamma}_i))$  per  $\lambda_k < 0$ . Inoltre, usiamo la condizione di Neumann  $f_{N+2,k}^n = f_{N+1,k}^n$  per linee non connesse sulla destra. Al bordo sinistro ( $m=0$ ) di linee connesse sulla sinistra, abbiamo bisogno del valore  $f_{-1,k}^n = M_k(f^{-1}(\hat{\gamma}_j))$  per  $\lambda_k > 0$ . Si noti che  $\hat{\gamma}_i$  e  $\hat{\gamma}_j$  sono i flussi massimizzati entranti ed uscenti descritti in precedenza, dove l'inversione del flusso è tale che le onde nascono a partire dalla giunzione. Per la precisione, per linee entranti nella giunzione, abbiamo che:

se  $u_N^n \in [0, \sigma]$  e  $\hat{\gamma}_i < F(u_N^n)$ , allora  $F^{-1}(\hat{\gamma}_i) \in [\tau(u_N^n), 1)$ ,

se  $u_N^n \in [0, \sigma]$  e  $\hat{\gamma}_i = F(u_N^n)$ , allora  $F^{-1}(\hat{\gamma}_i) = u_N^n$ ,

se  $u_N^n \in [\sigma, 1]$ , allora  $F^{-1}(\hat{\gamma}_i) \in [\sigma, 1)$ ,

con  $i=1,2$ .

